ЕКІ АЙНЫМАЛЫ 2-РЕТТІ ТЕҢДЕУЛЕРДІ КАНОНДЫҚ ТҮРГЕ КЕЛТІРУ. МАТЕМАТИКАЛЫҚ ФИЗИКАНЫҢ НЕГІЗГІ ТЕҢДЕУЛЕРІ. КОШИ ЖӘНЕ ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІҢ ҚОЙЫЛУЫ. МАТЕМАТИКАЛЫҚ ФИЗИКА ЕСЕПТЕРІНІҢ ҚОЙЫЛУЫНЫҢ ҚИСЫНДЫЛЫҒЫ. КОВАЛЕВСКАЯ ТЕОРЕМАСЫ

Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

10 қыркүйек 2025
Алматы, Қазақстан

Дәрістің мақсаты – II ретті көп айнымалы тұрақты коэффициентті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді таныстыру, оларды классфикациялау және канондық түрге келтіру

Негізгі сұрақтар:

1. II ретті көп айнымалы тұрақты коэффициентті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің жалпы түрі
2. II ретті көп айнымалы тұрақты коэффициентті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің типін анықтау
3. II ретті көп айнымалы тұрақты коэффициентті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді канондық түрге келтіру

II ретті көп айнымалы дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі
x және y айнымалыларынан тәуелді II ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі келесі өрнек анықталады

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u = G(x,y),$$

мұндағы A, B, C, D, E, F, G коэффициенттері — берілген функциялар, ал $u = u(x,y)$ функциясы — белгісіз ізделінді шешім. Егер жоғары ретті туындылардың алдында тұрған A, B, C функциялары үзіліссіз және $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ деп ұйғарайық.

Теңдеуді классификациялау II ретті теңдеулердің түрі коэффициенттердің комбинациясы арқылы анықталады. Нақтырақ айтқанда, дискриминант деп аталатын өрнек қарастырылады:

$$\Delta = B^2 - AC.$$

Теңдеу түрі дискриминанттың таңбасына байланысты жіктеледі

- Егер $\Delta > 0$ болса, теңдеу **гиперболалық** типке жатады.
- Егер $\Delta = 0$ болса, теңдеу **параболалық** типке жатады.
- Егер $\Delta < 0$ болса, теңдеу **эллипстік** типке жатады.

Канондық түрге келтірудің негізгі мақсаты — берілген теңдеуді (ξ, η) айнымалыларынан тәуелді теңдеуге, нақтырақ айтқанда интегралданатын түрге келтіріледі. Координаталар түрлендіруі мынадай түрде болады:

$$\xi = \xi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y).$$

Күрделі функцияны дифференциалдау ережелері арқылы төмендегі өрнектер алынады

$$\begin{aligned}
u_x &= U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x, \\
u_y &= U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y, \\
u_{xx} &= U_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + U_{\eta\eta}\eta_x^2 + (\text{бірінші ретті туындылар}), \\
u_{yy} &= U_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2U_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + U_{\eta\eta}\eta_y^2 + (\text{бірінші ретті туындылар}), \\
u_{xy} &= U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + (\text{бірінші ретті туындылар}).
\end{aligned}$$

Канондық түрді алу шарты
Екінші ретті туындылардың коэффициенттерін жаңа айнымалыларда жинақтай отырып, теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$A' U_{\xi\xi} + 2B' U_{\xi\eta} + C' U_{\eta\eta} + \cdots = 0,$$

мұндағы A', B', C' — A, B, C коэффициенттерінен және ξ, η функцияларынан тәуелді жаңа коэффициенттер.
Канондық түрге келтіру үшін, аралас туындының коэффициентін қарапайым түрге келтіру қажет. Бұл үшін жаңа айнымалылар келесі шартты қанағаттандыруы керек:

$$A(\xi_x)^2 + 2B\xi_x\xi_y + C(\xi_y)^2 = 0.$$

Бұл — **характеристикалық теңдеу**. Оның шешімі арқылы жаңа айнымалыларды анықтаймыз.

Теңдеудің канондық түрлері

Гиперболалық теңдеу ($\Delta > 0$) Характеристикалық теңдеу екі нақты және әртүрлі шешімге ие:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Бұл жағдайда жаңа айнымалылар $\xi(x, y)$ және $\eta(x, y)$ осы шешімдерге сәйкес таңдалып, теңдеу канондық келесі түрде жазылады:

$$U_{\xi\eta} + (\text{бірінші ретті туындылар}) = 0.$$

Эллипстік теңдеу ($\Delta < 0$) Бұл жағдайда характеристикалық теңдеудің нақты шешімі болмайды, тек комплекс шешімдері бар. Теңдеудің канондық түрі төмендегідей болады:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + (\text{бірінші ретті туындылар}) = 0.$$

Параболалық теңдеу ($\Delta = 0$) Бұл жағдайда характеристикалық теңдеудің бір еселі нақты түбірі бар, сондықтан теңдеудің канондық түрі:

$$U_{\eta\eta} + (\text{бірінші ретті туындылар}) = 0.$$

Бұл дәрісте біз жалпы екінші ретті теңдеудің типін анықтау әдісін және оны жаңа айнымалылар арқылы канондық түрге түрлендіру жолын қарастырамыз.

Жалпы түрдегі екінші ретті ДТДТ

n айнымалысы бар $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы үшін екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі:

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u = f(x_1, \dots, x_n),} \tag{1}$$

мұндағы $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ деп қабылдаймыз (симметриялық шарты). Коэффициенттер $a_{ij}(x), b_k(x), c(x)$ және $f(x)$ берілген функциялар.

Коэффициенттер матрицасы және оның рөлі

(1) теңдеудің екінші ретті туындылардың алдындағы коэффициенттерден симметриялық матрица құрастырамыз:

$$A = (a_{ij})_{n\times n}.$$

Бұл матрица (1) теңдеудің **негізгі бөлігі** деп аталады. (1) теңдеудің типі дәл осы матрицаның қасиеттерімен анықталады. (1) теңдеудің екінші ретті бөлігі:

$$L_2(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Қысқаша түрде бұл былай жазылады $L_2(u) = (\nabla, A\nabla u)$, мұндағы $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ – градиент векторы.

Теңдеу типін анықтау

Матрица A-ның меншікті мәндері $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ теңдеудің типін анықтайды.

Анықтама. Егер барлық λ_i нақты болса, онда (1) теңдеудің типі келесідей анықталады:

- Егер барлық λ_i бір таңбалы болса ($\lambda_i > 0$ немесе $\lambda_i < 0$), онда теңдеу **эллипстік типті**.
- Егер λ_i мәндерінің кейбірі оң, ал кейбірі теріс болса, онда теңдеу **гиперболалық типті**.
- Егер кейбір меншікті мәндер нөлге тең болса, онда теңдеу **параболалық типті**.

Теңдеуді канондық түрге келтіру идеясы

Канондық түрге келтіру — теңдеуді айнымалылардың сызықтық түрлендіруі арқылы қарапайым формаға түрлендіру әдісі. Ол үшін жаңа айнымалылар енгізіледі:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n,$$

және

$$x = S\xi, \quad \text{немесе} \quad \xi = S^{-1}x,$$

мұндағы S — матрицасы A-ны диагоналдайтын ортогонал түрлендіру матрицасы.

Диагоналдау Симметриялық A матрицасы әрқашан ортогонал S матрицасының көмегімен диагонал түрге келтіріледі:

$$S^T A S = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Жаңа айнымалылар жүйесінде екінші ретті бөлігі

$$L_2(u) = \lambda_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_2^2} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_n^2},$$

түрінде жазылады.
Канондық түрлері Сонымен, теңдеудің канондық түрі матрица A-ның меншікті мәндерінің таңбасына қарай келесі түрде болады:

- **Эллипстік тип:**
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_n^2} = F.$$
- **Гиперболалық тип:**
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_2^2} - \cdots - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_n^2} = F.$$
- **Параболалық тип:**
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_{n-1}^2} = F.$$

Мысал: үш айнымалы жағдай

Үш айнымалы үшін теңдеу:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + 2a_{13}u_{xz} + a_{22}u_{yy} + 2a_{23}u_{yz} + a_{33}u_{zz} = 0.$$

Осы теңдеу үшін коэффициенттер матрицасы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрицаның меншікті мәндерін $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ табамыз. Сонда теңдеудің типі төмендегіше анықталады:

- Егер $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — барлығы бір таңбалы болса $\rightarrow$ эллипстік тип.
- Егер біреуі оң, қалған екеуі теріс болса $\rightarrow$ гиперболалық тип.
- Егер біреуі нөлге тең болса $\rightarrow$ параболалық тип.

Тиісті түрлендіруден кейін теңдеу канондық түрге келеді:

$$\lambda_1 U_{\xi_1\xi_1} + \lambda_2 U_{\xi_2\xi_2} + \lambda_3 U_{\xi_3\xi_3} = 0.$$

Математикалық физика есептерінің қисындылығы

Физикалық модельдің математикалық қисындылығы келесі қасиеттер арқылы сипатталады:

1. **Бар болу:** шешім бар болуы керек.
2. **Жалғыздық:** берілген бастапқы және шекаралық шарттарға бір ғана шешім сәйкес болуы тиіс.
3. **Орнықтылық:** бастапқы деректердегі аз ғана өзгеріс шешімге шамалы ғана әсер етуі керек.

Жоғары үш талапты қанағаттандыратын есептер *қисынды қойылған (корректно поставленные)* деп аталады (Адамар мағынасында).

С. В. Ковалевскаяның теоремасы — дербес туындылы теңдеулердің шешімдерінің бар болу және жалғыздық шарттарын беретін негізгі нәтиже.

Теореманың тұжырымы

Егер теңдеу аналитикалық функциялардан құралған болса:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_i x_j}\right) = 0,$$

және бастапқы шарттар аналитикалық көпбұрыш бойында берілген болса, онда осы нүкте маңында теңдеудің бір ғана аналитикалық шешімі бар.

Маңызы

Ковалевская теоремасы:

- дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің бар болу мәселесін алғаш рет қатаң түрде дәлелдеді;
- Коши есебінің теориялық негізін қалады;
- кейінгі Пикара және Соболев типті жалпылауларға жол ашты.

Қосымша ақпарат

Студенттерге қосымша әрі толыққанды мәліметтер алу үшін [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] әдебиеттер ұсынылады.

Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М.
Математикалық физика теңдеулері. Астана, 2010 ж.

Михлин С.Г.
Курс математической физики. М., 1968.

Владимиров В.С.
Уравнения математической физики. М., 1984.

Орынбасаров М.О., Оршубеков Н.Ә.
Математикалық физика теңдеулері.Алматы, 2009 ж.

Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С.
Математикалық физика теңдеулерініңесептері мен жаттығулар жинағы. Алматы, 2009 ж.

Тихонов А.Н., Самарский А.А.
Уравнения математической физики. М., 2006.

Хомпыш Х.
Математикалық физика теңдеулері. Алматы, Қазақ Университеті, 2017 ж. 215 б.

НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА

РАҚМЕТ!